

113年專門職業及技術人員高等考試建築師、  
32類科技師（含第二次食品技師）、大地工程  
技師考試分階段考試（第二階段考試）  
暨普通考試不動產經紀人、記帳士考試試題

等 別：高等考試

類 科：電子工程技師

科 目：工程數學（包括線性代數、微分方程、向量分析、複變函數與機率）

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、考慮下列之5階常微分方程：

$$\frac{d^5 v}{dt^5} + v = v_s$$

假設初始值為  $v(0) = 1, \dot{v}(0) = 0, \ddot{v}(0) = 0, \ddot{\ddot{v}}(0) = 0, v^{(4)}(0) = 0$ 。

$$\text{令 } \sigma_1 = \cos \frac{\pi}{5}, \omega_1 = \sin \frac{\pi}{5}, \sigma_2 = \cos \frac{3\pi}{5}, \omega_2 = \sin \frac{3\pi}{5}$$

(一)請求  $v(t)$  之齊次解 (homogeneous solution)，請以上面係數  $(\sigma_1, \omega_1, \sigma_2, \omega_2)$  將齊次解表示為實數函數。(15分)

(二)若  $v_s(t) = e^{-2t}$ ，請求  $v(t)$  之特解 (particular solution)。(5分)

二、考慮一個二次型 (quadratic form)：

$$P = x^T Q x, \text{ 其中 } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

(一)請求矩陣  $Q$  之特徵值與對應之特徵向量。(20分)

(二)請判斷此二次型為 (半) 正定 (positive (semi) definite)、(半) 負定 (negative (semi) definite) 或皆不是？若限制  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ，請求此二次型之極大與極小值。(10分)

三、考慮一偏微分方程式：

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

其初始條件為  $T(x, 0) = 2, 0 \leq x \leq 1$ ，邊界條件為  $T(0, t) = 0$  與  $\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 1$ 。

- (一) 請求其穩態時 (時間很大時, 即  $t \rightarrow \infty$ ) 之解。(提示: 穩態解對時間不再變化, 只與空間變數有關) (10 分)
- (二) 請求此問題之特徵函數 (eigenfunctions)。(提示: 先做座標轉換, 移除穩態解, 使邊界條件為齊次, 再以分離變數法求特徵函數) (20 分)

四、考慮一電力場：

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 3y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

- (一) 如圖一所示, 有一半圓路徑  $C$ 。若有一帶電粒子沿此路徑移動, 從  $(1, 0)$  移動至  $(-1, 0)$ , 請求此電力場對此粒子運動所作之功, 即求  $W = \int_C F \cdot dr$ ,  $r = (x, y)$  為粒子質點位置。(10 分)
- (二) 如圖二所示, 此粒子再由  $(-1, 0)$  沿水平直線移動至  $(1, 0)$ , 形成一封閉路徑。請以格林定理 (Green's theorem) 求此電力場對此粒子沿此封閉路徑運動所作之功。(10 分)

