代號：01220
頁次：4－1

113年專門職業及技術人員高等考試建築師、32類科技師（含第二次食品技師）、大地工程技師考試分階段考試（第二階段考試）暨普通考試不動產經紀人、記帳士考試試題

等　　別：高等考試
類　　科：電子工程技師
科　　目：電磁學與電磁波
考試時間：2小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠禁止使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、一段長度為 L 的均勻無損傳輸線特性阻抗為 Z_0，傳播常數為 $\gamma = j\beta$，其中 β 為相位常數。一個頻率為 f 的正弦電壓源 V_0 與傳輸線的輸入端（$z = 0$）連接，傳輸線的末端（$z = L$）連接一負載阻抗 Z_L。請回答下列問題：
㈠請寫出傳輸線上電壓 $V(z)$ 與電流 $I(z)$ 的數學表達式，以及負載端（$z = L$）的電壓與電流數學表達式。（6分）
㈡若負載阻抗 $Z_L = \infty$（即開路），求負載端的電壓波反射係數和輸入端（$z = 0$）的輸入阻抗 Z_{in}。（6分）
㈢證明在㈡情況下，輸入阻抗 Z_{in} 與傳輸線長度 L 之間滿足 $Z_{in} = -jZ_0\cot(\beta L)$ 的關係式。（6分）
㈣解釋㈢中關係式的物理意義。（7分）

二、本題探討利用馬克斯威爾方程組推導自由空間中的電場波動方程式，以及其求解的過程，最後計算出其傳播波速。

㈠請利用馬克斯威爾方程組（如以下提示）推導電磁波電場在自由空間中的波動方程式。（10 分）

㈡在一維平面波的假設，亦即 $\vec{E}=\hat{x}E_x(z,t)$，請化簡㈠中的波動方程式。（5 分）

㈢驗證函數 $E_x(pt-qz)$ 是㈡中波動方程式的解，只要兩個參數的比值 $\dfrac{p}{q}$ 滿足某一特定關係式（亦即波速），並求出波速的數學表示式。（10 分）

〔提示〕:

•馬克斯威爾方程組：

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad \text{（在自由空間無電荷）}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

•向量恆等式：

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

三、本題考慮在均勻磁場中的電流導線與電流迴路所受的磁力與磁力矩問題。

㈠一段長度 L 且載有穩定電流 I 的導線，假設該導線置於均勻磁場 $\vec{B}$ 中，已知導線上微量長度 dl 所受的微量磁力可表示如下：

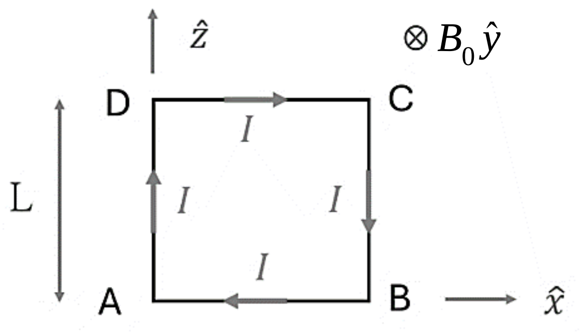
$$d\vec{F}_m = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

請推導出導線所受的總磁力 $\vec{F}_m$ 數學式。（3 分）

㈡如圖一所示，一個邊長為 L 的正方形電流迴路（電流為 I）置於均勻磁場 $\vec{B} = B_0\hat{y}$ 中。請計算左、右兩段導線（$\overline{\mathrm{AD}}$ 與 $\overline{\mathrm{BC}}$）所受的磁力，並證明其大小相等且方向相反。（8 分）

㈢繼續子題㈡，請計算上、下兩段導線（$\overline{\mathrm{CD}}$ 與 $\overline{\mathrm{AB}}$）所受的磁力，再計算這四段導線所受磁力的合力與合力矩。（14 分）

〔提示〕：力矩 $\vec{\tau}$ 的公式 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$



圖一

四、考慮純量場$G=\nabla\cdot(\phi\vec{E})$，其中$\phi$是任意可微分之純量場，且$\nabla^2\phi=0$（稱$\phi$為調和函數）；又$\vec{E}$是靜電場，滿足$\nabla\times\vec{E}=0$。假設某一區域$V$是邊長為 a 的立方體，該立方體的邊界外表面為 S，且假設邊界 S 上電位ψ為零，請計算純量場 G 在區域 V 的體積分值$\int_V G\,dv$。（25 分）

〔說明〕：必須利用以下散度定理和電磁學基本定律等進行推導與計算，否則不予計分。

•散度定理：$\int_V \nabla\cdot\vec{A}dv=\int_S \vec{A}\cdot d\vec{s}$

•電場與電位的關係：$\vec{E}=-\nabla\psi$

•靜電場滿足高斯定律：$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}=0$（設區域 V 內無電荷）

•向量恆等式：

$$\nabla\cdot(\phi\vec{E})=\phi\nabla\cdot\vec{E}+\vec{E}\cdot\nabla\phi$$
$$\nabla\cdot(\psi\nabla\phi)=\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\psi\nabla^2\phi$$