111年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、海岸巡防人員、移民行政人員考試及111年未具擬任職務任用資格者取得法官遴選資格考試試題

考 試 別：調查人員
等　　別：三等考試
類 科 組：電子科學組
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠禁止使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈢本科目得以本國文字或英文作答。

一、針對一個三度空間中的向量場（vector field）$\vec{F}=(x^2, xy, y+z^2)$，請執行下列計算：（每小題5分，共20分）

㈠請求出$\vec{F}$的散度（divergence），也就是$\nabla\cdot\vec{F}$，其中$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$（亦可寫為$\nabla=\hat{\imath}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$，其中的$\hat{\imath}$、$\hat{\jmath}$、$\hat{k}$分別為坐標軸的x-軸、y-軸、z-軸方向的單位向量）。

㈡請求出$\vec{F}$的旋度（curl），也就是$\nabla\times\vec{F}$。

㈢$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=$？

㈣$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=$？

二、請考慮一個微分方程式，如下所示：

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+6\frac{d}{dx}y(x)-7y(x)=\cos(x)$$

㈠本微分方程式是否可以歸類為二階的線性微分方程式（second-order linear differential equation）？（5分）

㈡請寫出此微分方程式之齊次解（homogeneous solution）的一般形式（general form）。（7分）

㈢請求解此微分方程式之特定解（particular solution）。（8分）

三、請考慮一個 2×2 矩陣，如下所示：

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

㈠我們以A^{-1} 來代表A的反矩陣（inverse matrix），那麼 $A^{-1}=$？（5分）

㈡我們以det（A）來代表A的行列式（determinant），那麼det（A）＝？（5分）

㈢請證明A為不可對角化（not diagonalizable）。（10分）

四、有一個連續隨機變數（continuous random variable）X，其機率密度函數（probability density function）如下所示：（每小題 5 分，共 20 分）

$$f_X(x) = C \cdot e^{-\lambda|x|}, \text{ for } -\infty < x < \infty$$

其中λ為大於0的給定常數，C則為待定常數。

㈠$C = ?$

㈡請求出X的期望值（expectation）。

㈢我們以$\text{Prob}(\cdot)$來代表機率值，那麼$\text{Prob}(X > X^2) = ?$

㈣我們定義一個隨機變數$Y = |X|$；請求出Y的機率密度函數。

五、我們考慮一個複變函數$f(z) = \cos(z)/z^5$，已知其羅倫特展開式(Laurent expansion)為：（每小題 5 分，共 20 分）

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n-5} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{720} \cdot z + \frac{1}{40320} \cdot z^3 - \cdots$$

㈠當我們試圖將f(z)以題中所示之羅倫特展開式展開時，其實有某一些（或是某一個）複數平面上的點必須加以排除，請問是那一些？

㈡我們將f(i)寫成$f(i) = \alpha + i \cdot \beta$ $(i = \sqrt{-1})$，那麼$\alpha = ?\ \beta = ?$

㈢如果我們用C來表示在複數平面上的單位圓（也就是$x^2 + y^2 = 1$）上面以逆時針方向從$z = 1$開始繞一圈走回原出發點，那麼$\int_C f(z)dz = ?$

㈣如果我們用K來表示在複數平面上以$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$所描述的圓上面以逆時針方向從$z = 1$開始繞一圈走回原出發點，那麼$\int_K f(z)dz = ?$